



---

# FFI-RAPPORT

---

20/02394

## Compressed sensing og sparse rekonstruksjon i radarsammenheng

Jabran Akhtar



# **Compressed sensing og sparse rekonstruksjon i radarsammenheng**

Jabran Akhtar

---

---

**Emneord**

Radar

Deteksjon

**FFI-rapport**

20/02394

**Prosjektnummer**

1440

**Engelsk tittel**

Compressed sensing and sparse reconstruction in radars

**Elektronisk ISBN**

978-82-464-3291-5

**Godkjennere**

Børge Torvik, *forskningsleder*

Trygve Sparr, *forskningssjef*

*Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.*

**Opphavsrett**

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

---

## Sammendrag

Denne rapporten gir en kort gjennomgang av de viktigste prinsippene bak *compressed sensing* og vurderer noen mulige anvendelser i radarsammenheng. Compressed sensing er en metodikk som kan anvendes for å samle inn og rekonstruere data eksakt, selv når tilgjengelig datamengde ikke skulle tilfredsstille kravene for rekonstruksjon i henhold til klassisk sampling teori. Teorien bak compressed sensing har ført til endret forståelse av de grunnleggende prinsippene i signalbehandling og har fått mye oppmerksomhet i ulike bruksområder. Det er i litteraturen også foreslått ulike bruksområder innen radar. Denne rapporten tar for seg noen scenarioer begrenset til hvordan compressed sensing kan benyttes for generering av range-dopplerbilder. Range-dopplerbilder brukes ofte for å detektere mål, men for å generere høyoppløselige bilder må en radar sende mange pulser. Ved å ta i bruk compressed sensing teknikker kan en heller utsende færre pulser og likevel gjenskape gode range-dopplerbilder ved hjelp av sparse rekonstruksjons metoder. De presenterte metodene er demonstrert anvendt både på simulerte og innsamlede datasett.

---

## Summary

This report gives a short introduction to the main principles behind compressed sensing and sparse reconstruction and looks at some radar applications. The techniques behind compressed sensing allows for exact signal recovery even if the available data may not satisfy the requirement imposed by classical sampling theory. This report particularly investigates the usage of compressed sensing in radars for construction of range-Doppler images. These images are often employed for target detection and compressed data can be collected by emitting fewer pulses. By employing sparse reconstruction techniques one may still recover the full images. The presented methods are shown demonstrated on both simulated and real data.

---

---

# Innhold

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| <b>Sammendrag</b>                   | 3  |
| <b>Summary</b>                      | 4  |
| <b>1 Introduksjon</b>               | 7  |
| 1.1 Innledning                      | 7  |
| 1.2 Undersampling og rekonstruksjon | 7  |
| <b>2 Radaranvendelser</b>           | 11 |
| 2.1 Range-doppler og CS             | 11 |
| 2.1.1 Radar og signalmodell         | 13 |
| 2.1.2 Sparse rekonstruksjon         | 14 |
| 2.1.3 Fusjonerte løsninger          | 16 |
| 2.2 Praktiske utfordringer          | 16 |
| <b>3 Eksempler og analyser</b>      | 18 |
| 3.1 Eksempler fra simulerte data    | 18 |
| 3.2 Eksempler fra ekte data         | 24 |
| <b>4 Oppsummering</b>               | 29 |
| <b>Vedlegg</b>                      |    |
| <b>A MATLAB Klasse</b>              | 30 |
| <b>Referanser</b>                   | 32 |



---

---

# 1 Introduksjon

## 1.1 Innledning

Tradisjonell signalbehandling har i lengre tid forholdt seg til samplingsteoremet. Samplingsteoremet sier at hvis man skal digitalisere et båndbegrenset signal, så må det samples (punktprøves) med minst to ganger den høyeste frekvensen i signalet for å kunne rekonstrueres eksakt [1]. Denne frekvensraten er også kjent som Nyquistraten. Dette kravet er nødvendig fordi man i utgangspunktet ikke har kjennskap til verdiene mellom samplene eller punktene. Nyquistraten gjør at en sikrer seg mot uventede utslag. Samplingsteoremet er et grunnleggende konsept som anvendes blant annet i analog til digital konvertering og danner fundamentet for datainnsamling og avbildning i andre sammenhenger.

Compressed sensing (CS), også kalt compressed sampling, er en teknikk som ble utviklet rundt 2005 [2, 3, 4] og er en alternativ metode for å punktprøve og deretter rekonstruere signaler hvor man ikke lenger trenger å forholde seg til samplingsteoremet. Noe av tankegangen som man i dag finner i CS-teori var til dels blitt eksperimentert med i ulike sammenhenger også før CS-konseptet formelt ble utviklet. Det manglet dog en enhetlig forståelse for hvorfor en i enkelte situasjoner kunne oppnå perfekt rekonstruksjon selv når Nyquistraten ikke var blitt overholdt. Dette endret seg med arbeidene til Cades og Tao [2] og har ført til et lite paradigmeskifte innen signabehandling. Compressed sensing beskriver hvordan Nyquistraten kan fravikes, samtidig som man kan gjenskape signaler eksakt, under gitte betingelser, ved bruk av sparse rekonstruksjons (SR)-metoder.

## 1.2 Undersampling og rekonstruksjon

Grunnidéene bak compressed sensing og sparse rekonstruksjon kan til dels beskrives ved hjelp av lineære likningssystemer. Som i et vanlig likningssystem, ønsker man å finne en løsning på

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \quad (1.1)$$

eventuelt,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n} \quad (1.2)$$

hvis man tar med støy gitt ved  $\mathbf{n}$ .  $\mathbf{y}$  kan her være målinger eller data som er observert gjennom en transformasjon eller at dataene er blitt påvirket av en eller annen prosess gitt med matrisen  $\mathbf{A}$ . Målet er å finne den ukjente vektoren  $\mathbf{x}$ . Hvis det er like mange likninger som antall ukjente, er det velkjent at det kan eksistere én unik løsning på problemet. For å finne den må matrisen  $\mathbf{A}$  inverteres. Under forutsetningen av full rang kan den inverterte multipliseres med  $\mathbf{y}$  for å finne  $\mathbf{x}$  gitt ved

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}. \quad (1.3)$$

I andre sammenhenger kan det eksisterere veldig mange målinger, med andre ord flere likninger enn ukjente, noe som gir opphav til overbestemte systemer. En unik løsning på problemet som da

minimerer det kvadratiske avviket, har vært kjent i flere hundre år og er en standard anvendelse av minste-kvadraters metode,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{y}. \quad (1.4)$$

I motsatt tilfelle kan vi ha en problemstilling hvor det er færre likninger enn ukjente, med andre ord et underbestemt likningssystem. Prosessen med undersampling av signaler kan sees på som et slikt problem hvor det er samlet inn mindre mengde data enn det som behøves for å få en perfekt rekonstruksjon. Et slikt problem kan i utgangspunktet ha uendelig mange løsninger, og det er dermed langt fra sikkert at en kan finne frem den korrekte entydige løsningen. Det er her sparse rekonstruksjon kommer inn og gir en teori for hvordan en likevel kan finne en unik løsning under gitte forutsetninger. En slik forutsetning er at løsningen  $\mathbf{x}$ , skal være *sparse* eller *compressible*. Sparse i denne sammenheng betyr at mange av verdiene i løsningen antas, eller er på forhånd kjent, å være lik null eller relativt små (som for eksempel støy hvis signal til støy forholdet er tilstrekkelig stort). Hvis dette er tilfellet, kan denne unike løsningen i utgangspunkt finnes ved hjelp av en optimeringsstrategi hvor en prøver å maksimere antall nuller i løsningen samtidig som løsningen ellers skal samsvare med betingelsene:

$$\text{minimer } \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{slik at } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

$\|\cdot\|_0$  beskriver her den såkalte 0-normen som er antall elementer som ikke er lik 0. Ved støy kan optimeringsproblemet justeres til

$$\text{minimer } \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{slik at } \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \quad (1.6)$$

hvor  $\epsilon$  er akseptabel feilmargin i løsningen i henhold til standard euklidsk 2-norm. Nå er det slik at de fleste signaler og løsninger på likningssystemer ikke kan antas å være sparse. Det er likevel ofte mulig å finne transformasjoner slik at løsninger etter en slik transformasjon generelt sett blir sparse. Et typisk eksempel på dette er digitale bilder. Digitale råbilder opptar vanligvis mye lagringsplass. De transformeres ofte ved hjelp av for eksempel cosinus-transformasjon eller wavelets før videre koding og lagring. De høye frekvensene i bildene vil normalt inneha mindre energi og de korresponderende koeffisientene vil bestå av små verdier. Etter en transformasjon vil derfor bildene ofte kunne kategoriseres som mer sparse. De mindre verdiene i et transformert bilde kan vanligvis sees helt bort fra og settes lik null uten at det går nevneverdig ut over kvaliteten. Dette vil kunne ytterligere øke graden av sparsomhet.

Hvis det antas at løsningen på et underbestemt likningssystem er sparse i en eller annen transformasjon, vil det være mulig å anvende likning (1.5) eller (1.6) for å rekonstruere opprinnelige data, så fremt de riktige transformasjonene er tatt hensyn til. Den største utfordringen med likningene (1.5) eller (1.6) er at det å finne en løsning direkte via disse fører til et NP (non-deterministic polynomial-time)-hard problem. NP-hard problemer er typisk veldig resursskrevende med en eksponentiell tidsbruk og hvor det heller ikke er kjent om løsninger kan finnes innen polynomiell tid [5]. Dette utelukker derfor at løsninger kan bestemmes innen akseptable tidsrammer. Den klassiske løsningen på slike problemer ville ha vært å bruke 2-normen  $\|\cdot\|_2$ , men 2-normen gir i utgangspunktet ikke sparse løsninger, heller det motsatte. Det man i dag vet er at hvis en istedenfor bruker absolutt normen,  $\|\cdot\|_1$ , vil det resultere i løsninger som samsvarer med 0-norm løsningen hvis noen tilleggsforutsetninger blir oppfylt. Den mest anvendte metoden i sparse rekonstruksjon er dermed basert på å finne løsninger ved hjelp av

$$\text{minimer } \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{slik at } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.7)$$

---

---

eller

$$\text{minimer } \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{slik at} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \quad (1.8)$$

hvor 0-normen er blitt erstattet med 1-normen også kjent som absolutt norm. Fordelen med 1-norm er at det er mulig å finne en løsning ved hjelp av konvekse eller lineære programmeringsteknikker. Dette vil fortsatt måtte sees på som en regnetung prosess hvor en løsning må finnes ved hjelp av iterasjonsrunder, men betydelig mindre resursskrevende enn 0-normen. Sammenhengen mellom 0- og 1-normen har vært gjenstand for mye forskning i CS-sammenheng og for at 1-normen skal kunne gi en løsning som samsvarer med 0-normen må det legges ekstra betingelser på likningssystemet. Et slikt tilleggskrav er at matrisen  $\mathbf{A}$  må være 'god', og tilfredsstillende RIP (restricted isometry property) kravet, formelt definert som

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (1.9)$$

En matrise  $\mathbf{A}$  sies å tilfredsstillende RIP med sparsomhetsgrad  $k$  for en  $\delta_k \in (0, 1)$  hvis (1.9) tilfredsstilles for alle  $\mathbf{x}$  gitt  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$ . En mer intuitiv forståelse av dette er at matrisen  $\mathbf{A}$  er omtrentlig ortonormal og for en gitt  $\mathbf{x}$  bare i begrenset grad endrer energien i denne. En ortonormal matrise er en matrise hvor alle kolonnene er ortogonale mot hverandre og har lengde lik en. Matrisen  $\mathbf{A}$  kalles ofte i litteraturen for sensing matrix eller dictionary matrix. For praktiske formål er det av vesentlig betydning hva slags matriser som tilfredsstiller dette kravet. For en gitt matrise er det vanskelig å bestemme om RIP-kravet blir oppfylt eller ikke siden det her også inngår en 0-norm. Matriser som i statistisk sammenheng likevel har vist seg å kunne tilfredsstillende RIP-kravet med høy grad av sannsynlighet inkluderer matriser som består av tilfeldig utvalgte verdier fra for eksempel Gauss/normal-fordeling og Bernoulli-fordeling. Av mer interesse innen signalbehandling er partielle Fouriermatriser som også er anvendbare og kan gi akseptabel ytelse med en rekonstruksjon som er robust i forhold til hvit Gaussisk støy [6, 7, 8, 9]. Perfekt rekonstruksjon av et signal vil derfor være garantert med en sannsynlighet definert av signalets sparsomhet  $k$ , og matrisen som anvendes. Det betyr at hvis signalet ikke kan representeres i en sparse form vil en rekonstruksjon heller ikke føre til gode resultater.

Den siste betingelsen i sparse rekonstruksjon ved bruk av 1-norm er knyttet til hvor mange målinger det bør foreligge for å få til eksakt rekonstruksjon på nivå med samplingsteoremet. Dette er nært beslektet med kravet om type matrise som anvendes for rekonstruksjon. Teorien tilsier at antall målinger  $M$  bør tilfredsstillende  $M > ck \log(N/k)$  hvor  $N$  er antall ukjente som skal bestemmes og  $c$  er en konstant avhengig av hva slags matrise som blir anvendt. Eksakte verdier for  $c$  har vært vanskelig å utlede, men det eksisterer estimer for øvre grenser for enkelte matrisetyper. Kravet blir derfor ofte overført til at antall målinger må være i størrelsesorden  $M = O(k \cdot \log(N))$ .  $O()$  notasjonen brukes her for å angi en asymptotisk tilnærming for hvordan antall målinger avhenger av  $k$  og  $N$ . En tommelfingerregel [10] som kan anvendes angir at antall tilfeldige målinger  $M$  bør være omtrent fire ganger større enn antall ikke-null elementer  $k$ ,

$$M \geq 4k. \quad (1.10)$$

Dette vil kunne generere eksakte løsninger med høy sannsynlighet hvis samplingen foretas i en tilfeldig rekkefølge, men vil ikke redusere antall foretatte målinger ned til et minimum. Det bemerkes at det å foreta datainnsamling i en veldig deterministisk måte, for eksempel sample annenhver gang eller at alle målinger foretas i et veldig kort sammenhengende intervall, vil generelt ikke lede til gode rekonstruksjoner på grunn av lite egnede matriseegenskaper. Målinger foretatt i en tilfeldig

---

---

rekkefølge er derfor fordelaktige, men har likevel en viss sannsynlighet for at man kan ende opp med en spesielt uegnet sekvens. Det er derfor mulig å pregenerere gunstige kvasitilfeldige sekvenser som kan brukes. I mange anvendte sammenhenger er en avhengig av en viss komposisjon ved datainnsamlingen noe som igjen kan resultere i strukturelle matriser. Dette er et aktivt fagområde dominert av matematikk og statistisk teori hvor nye resultater med ulike typer matriser og strukturer fortsatt presenteres. Mange ulike teknikker er også blitt foreslått for hvordan en løsning skal kunne bestemmes. For en grundigere gjennomgang av teorien henvises det til litteraturen [4, 8, 11, 9].

---

---

## 2 Radaranvendelser

Compressed sensing med tilhørende teknikker kan tas i bruk i ulike sammenhenger hvor det som skal rekonstrueres antas å være sparse i en eller annen form. Sparse, som definert tidligere i denne konteksten, betyr at veldig mange verdier er null eller relativt små. Som eksempel kan det være et miljø med få mål og lite clutter. Datainnsamlingen bør, som nevnt tidligere, foregå på en slik måte at betingelse for sparse rekonstruksjon blir tilfredsstillt; det vil si at rekonstruksjonsmatrisen er egnet for dette formålet mens antall målinger også samsvarer med minimumskravene. Ved å bruke CS vil en ofte oppnå en fordel ved at det samles inn mindre data. Dette kan for eksempel gi gevinst med hensyn til redusert tidsbruk eller bruk av mindre båndbredde. Utfordringen ligger i å overføre et gitt problem over til en form slik at det kan behandles og prosesseres i en CS-kontekst.

Operative radarer kan samle inn store datamengder i løpet av kort tid, mens det ofte er begrenset antall interessante objekter i en gitt scene. Slike situasjoner kan dermed være gode kandidater for CS-teknikker. Det er i løpet av de siste årene foreslått mange ulike anvendelser av CS og SR i radar hvorav en av de første publikasjonene kom ut i 2009 [12]. I dag eksisterer det omfattende litteratur på mange ulike bruksområder med radar som sensor [13, 3, 14]. Dette inkluderer generering av range-dopplerkart (også kalt range-dopplerbilder) [15, 16, 17], syntetisk aperture radar (SAR) [18], inverse syntetisk aperture radar (ISAR) [19], fylling av gap mellom frekvensbånd [20], MIMO radar [21, 22] og så videre.

### 2.1 Range-doppler og CS

Dette kapitlet tar hovedsaklig for seg bruken av CS og SR for rekonstruksjon av range-dopplerkart (avstand-dopplerkart) som foreslått i [16, 23]. Metodene er langt mindre generelle enn for eksempel i [12] hvor både range og doppler er gjenstand for SR prosesser. Metodene foreslått her utnytter dermed ikke CS potensialet fullt ut, men kan til gjengjeld sees på som en mykere overgang til en radar som bruker CS-prinsipper i noen utvalgte dimensjoner. Hovedfokuset er på konstruksjon av range-dopplerbilder som prosesseres fra en radar etter å ha sendt et antall pulser i løpet av en koherent integrasjonsperiode (CPI). Formålet med å sende mange pulser er å få opp signal til støyforholdet (SNR) samtidig som en frekvensanalyse gjør det mulig å beregne målenes hastighet med en finere oppløsning.

For å generere range-dopplermatriser vil en pulset radar derfor emittere  $N$  pulser etter hverandre uten endring i antennens elevasjon eller asimut. Det må dog tas hensyn til at alt for lang tid på målet kan medføre dekorrelasjon. Ulempen med lange pulstog er tidsbruken. For å få tidsbudsjettet til å gå opp er det vanlig praksis å bruke ulik tid i forskjellige retninger og at radaren har ulik prioritering avhengig av for eksempel elevasjonsvinkel. Dette vil naturligvis også gi utslag i forskjellig doppleroppløsning. Når en radar deretter begynner å tracke objekter, kan det hende at tidsbruken må endres i enda større grad ved at den økes i enkelte retninger og prioriteres ned, eller helt bort, i andre.

Vi kan derfor konstruere en radarmode hvor radaren opererer etter en delvis CS-tankegang. I denne moden vil radaren alltid generere et range-dopplerkart tilsvarende et visst antall pulser ( $N$ ), selv om

den i realiteten sender ut færre pulser. Konseptet går ut på at gap i dataene vil kunne regenereres ved hjelp av sparse rekonstruksjon i doppler-omenet. Her antas det implisitt at scenen som belyses hovedsaklig er sparse, altså at det er relativt få enkeltspredere per kvantifiserte avstandcelle. Hvis målene sprer seg mye ut i doppler sammen med eventuelt clutter som heller ikke er konsentrert rundt bestemte hastigheter vil ikke dette kunne kategoriseres som sparse. Vi ser også bort fra flertydigheter i for eksempel avstand og antar at de kan løses ved hjelp av andre kjente teknikker eller at radaren opererer kun i en lav pulsrepetisjonsfrekvens (PRF). Radarer som er avhengige av mange etterfølgende pulser for å kunne estimere parametere vil derfor ikke tilfredsstillende disse betingelsene.

Gitt antagelsene, én slik CS-basert radarmode kan være at radaren sender ut et visst antall pulser i en retning  $a$ , før den ved hjelp av elektronisk styring endrer retning og sender noen pulser i en annen retning  $b$ . Så kommer den tilbake til  $a$  før den igjen går videre til  $b$ . På den måten kan den vekselvis belyse begge retninger i løpet av en tidsepoke som normalt ville tillate belysning kun i en retning. For å tilfredsstillende kravene bak likning (1.10) må den ene retningen muligens prioriteres fremfor den andre eller så kan det sendes enkelte pulser før og etter en slik veksling for å få betingelsene til å gå opp for begge vinkelene. Uansett, vil en slik alternering føre til gap i dataene i forhold til vekselvise retningsforandringer. Dette blir nå en problemstilling som er naturlig tilpasset CS gitt at de andre betingelsene kan oppfylles. Range-dopplerbilder genereres ved å ta en Fourier-transformasjon i slow-time for alle diskrete avstandsceller; så lenge antagelsen om at det ikke er for mange mål gitt en bestemt range bør en sparse rekonstruksjonsteknikk klare å gjenskape dataene. Slike teknikker egner seg spesielt godt for radarer med fasestyrte antenner hvor digitale stråleformingsteknikker kan anvendes for å endre transmisjonsretning som er i fokus.

Et eksempel på et mulig sendeskjema med veksling for en gitt PRF mellom to retninger med tre gap er gjengitt i tabell 2.1. X angir at det utsendes en puls i den angitte retningen og det antas at det brukes en form for compressed sensing hvor det kun sendes  $M = 7$  pulser for en integrasjonsperiode på  $M = 10$ . I skjemaet sendes det først ut fire pulser i retning  $a$  før man videre sender pulser vekselvis mot både retning  $a$  og  $b$ . Etter puls 10 emitteres det fire etterfølgende pulser i retning  $b$ . Med denne fremgangsmåten vil begge retningene være dekket i løpet av 14 tidsepoker, i kontrast til tradisjonell sampling på 20 epoker noe som gir en 30% besparelse. Sendeskjemaet kan deretter gjentas mot to nye retninger.

| Puls        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| Retning $a$ | X | X | X | X |   | X |   |   | X | X  |    |    |    |    |
| Retning $b$ |   |   |   |   | X |   | X | X |   |    | X  | X  | X  | X  |

Tabell 2.1 Eksempel på sendeskjema

En alternativ variant og tolkning av metoden nevnt over er at radaren ikke elektronisk endrer senderretning, men heller belyser samme retning ved hjelp av ulike frekvenser. Et identisk mål kan ha ulik RCS (radar cross section) respons ved forskjellige frekvenser og det er en etablert teknikk å hoppe litt i frekvens når man søker etter mål. For å konstruere range-dopplerbilder må dataene være koherente og i samme frekvensbånd; en hopping i frekvens (istedenfor endret retning) fører dermed til ellers identisk problemstilling som nevnt ovenfor.

Det er mulig å tenke seg flere måter en radar med en CS-mode kan operere. En strategi kan være at radarens hovedsaklig kun opererer i en CS-mode og først når det oppdages eventuelle mål, eller

at rekonstruksjon med en sparse mode ikke lenger gir opphav til sparse dopplerprofiler, at den da går over til en tradisjonell teknikk hvor alle pulser sendes fortløpende uten gap. Alternativt, kan en CS-mode tas i bruk når tidsbudsjettet ikke lenger går opp. De minst aktuelle retningene, som i tillegg mest sannsynlig vil inneholde få mål og dermed være sparse, kan da behandles med en CS-mode. Et valg av slike strategier vil også kunne være avhengig av tilgjengelig regnekraft.

Neste avsnitt tar for seg hvordan en slik radarmode kan modelleres og brukes som utgangspunkt for videre simuleringer.

### 2.1.1 Radar og signalmodell

Det antas at et radarsystem sender og mottar  $N$  pulser i løpet av en koherent integrasjonsperiode. Pulsen  $p(t)$  emitteres og den innkommende refleksjonen i slow-time  $u$ ,  $u = 1, 2, \dots, N$ , kan beskrives ved hjelp av

$$s(t, u) = \sum_n \sigma_n p(t - \Delta_n) e^{jv_{n,u} t} + \tilde{w}(t), \quad (2.1)$$

hvor  $t$  er fast-time,  $\sigma_n$  er refleksjonsverdi (RCS) fra mål  $n$ ,  $\Delta_n$  er tidsforsinkelsen assosiert med hver enkelt reflektor,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\tilde{w}(t)$  er hvit Gaussisk støy og  $e^{jv_{n,u} t}$  er dopplerfaseskiftene. For et mål med konstant hastighet kan den modelleres som

$$v_{n,u} = v_{n,u-1} + \frac{r_n 4\pi f_c}{c f_{PRF}}, \quad (2.2)$$

hvor  $r_n$  er den radielle hastigheten til mål  $n$ ,  $f_c$  er radarens bølgefrequens,  $f_{PRF}$  er pulsrepetisjonsfrekvens og  $c$  er lysets hastighet [24]. For enkelhetsskyld kan vi definere  $v_{n,0} = 0$ . Videre antas det at i løpet av  $N$  pulser er det ingen signifikant endring i målenes amplitude og heller ingen endring i tidsforsinkelsen. Dette tilsvarer mål med Swerling statistikk av type 1.

Reflektert signal samples med en gitt rate og det foretas en matched-filteringoperasjon med den tidsreverserte og konjugerte pulsen  $p^*(-t)$ . De pulskomprimerte dataene kan da spesifiseres som

$$Y(t, u) = p^*(-t) * s(t, u) = \sum_n \sigma_n \text{psf}_p(t - \Delta_n) e^{jv_{n,u} t} + w(t), \quad (2.3)$$

hvor  $*$  angir konvolusjon i fast-time og  $\text{psf}_p(t) = p(t) * p^*(-t)$  er punktspredefunksjonen. I praktiske situasjoner vil også fast-time  $t$  være diskret og kan skrives som

$$\mathbf{Y}(t_m, u) = Y(t_m \Delta t, u) \in \mathbb{C}^{N \times R}, \quad t_m = 1, 2, \dots, R, \quad (2.4)$$

gitt at  $\Delta t$  er tidsoppløsningen for radaren.

For videre prosessering vil  $\mathbf{Y}(t_m, u)$  typisk multipliseres i slow-time med en vindusfunksjon  $\mathbf{w}(u)$  som gir

$$\mathbf{Y}_W(t_m, u) = \mathbf{w}(u) \mathbf{Y}(t_m, u) \in \mathbb{C}^{N \times R}. \quad (2.5)$$

Videre foretas det en Fouriertransformasjon over slow-time for alle avstandsceller. Dette gir da et standard range-dopplerkart, også kalt range-dopplerbildet,  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D}(t_m, \omega) = \mathbf{F} \mathbf{Y}_W(t_m, u) \in \mathbb{C}^{N \times R}. \quad (2.6)$$

Er den diskrete Fouriermatrisen av størrelse  $N \times N$ , hvor element  $k, l$  gis ved  $\mathbf{F}_{k,l} = \exp(2\pi jkl/N)$ .

Vi bemerker at den ovennevnte prosessen er uavhengig for hver diskrete avstandscelle og kan gjennomføres med Fast Fourier transformasjon (FFT) som gjør at operasjonen kan gjennomføres meget hurtig.  $\omega$  kan videre konverteres til hastigheter mellom  $[-v_{max} \ v_{max}]$  hvor  $v_{max} = \frac{c f_{PRF}}{4f_c}$  er den maksimale utvetydige dopplerhastigheten. doppleroppløsningen,  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ , er direkte koblet opp mot antall tilgjengelige pulser  $N$  i slow-time.

### 2.1.2 Sparse rekonstruksjon

For en CS-radar kan det nå antas at det ikke utsendes  $N$  etterfølgende pulser i en og samme retning, men at den avkortede datamatriksen  $\tilde{\mathbf{Y}}(t_m, \tilde{u}) \in \mathbb{C}^{K \times R}$  kun innholder  $K < N$  slow-time målinger,  $\tilde{u} = 1, 2, \dots, K$ , samlet tilfeldig igjennom den maksimale integrasjonstiden på  $N$  pulser. De slow-time posisjonene hvor data er innsamlet kan angis med settet  $D$ . Ved et redusert datasett vil dopplermålingene for et gitt mål følge en diskontinuerlig form

$$v_{n,\tilde{u}} = v_{n,\tilde{u}-1} + k(\tilde{u}) \frac{r_n 4\pi f_c}{c f_{PRF}}. \quad (2.7)$$

Avvikene assosiert med transmisjonsstrukturen vil kunne modelleres med en funksjon  $k(\tilde{u}) \in \mathbb{N}$  og en  $k(\tilde{u})|_{\tilde{u}=v} > 1$  vil indikere et hopp i fase på grunn av irregulær sampling i slow-time. Et range-dopplerkart kan fortsatt konstrueres ved å foreta en Fouriertransformasjon med en  $K \times K$  matrise over alle avstander, men inkoherente data vil resultere i dopplerlekkasje og lavere integrasjonsgevinst.

Her foreslås det derfor å bruke sparse rekonstruksjon for å regenerere de savnede  $N - K$  pulsene. I tillegg til huller i mellom dataene er det også mulig å anta at man har gap på yttersidene av pulstoget. Dette kan anvendes for å ekstrapolere pulser på kantene, noe som vil forbedre doppler-frekvens nøyaktigheten for hvor målene befinner seg. En slik rekonstruksjon kan dermed fungere som en enkel teknikk for å øke oppløsning, såkalt superresolution. Det bemerkes at dette ikke samsvarer med klassisk nullfylling i tidsdomenet for å interpolere i frekvens ved hjelp av Fourier transform. En ekstrapolasjonprosess ved hjelp av sparse rekonstruksjon vil i motsetning til dette, i tidsdomenet, generere pulser som vil kunne øke det totale energinivået for eventuelle mål.

Den ideelle løsningen på det ovennevnte problemet skal interpolere og/eller ekstrapolere (2.7) til en form på (2.2) med konstante faseskift over slow-time siden bare dette kan føre til full fokusering av hvert enkelt mål i doppler. Det er antatt at dopplerprofilen er sparse og en fokusering av målene samsvare med den løsningen som maksimerer sparsommelighet. Vi definerer derfor  $L$  til å indikere antall ut verdier i slow-time og antar  $L \geq N$ ; en  $L > N$  henviser til ekstrapolasjon. Den rekonstruerte profilen i slow-time er gitt ved  $\hat{\mathbf{Y}}(t_m, \hat{u}) \in \mathbb{C}^{L \times R}$ ,  $\hat{u} = 1, \dots, L$  og forholdet til range-dopplerkart er som tidligere definert ved

$$\hat{\mathbf{D}}(t_m, \hat{\omega}) = \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{w}}(\hat{u}) \hat{\mathbf{Y}}(t_m, \hat{u}) \in \mathbb{C}^{L \times R}, \quad (2.8)$$

hvor  $\hat{\mathbf{F}}$  er en  $L \times L$  Fouriermatrise. Det kan i tillegg defineres en binær utvelgelsesmatrise  $\mathbf{M} \in \mathbb{B}^{K \times L}$  ved å ta en  $L \times L$  identitetsmatrise  $\mathbf{I}_{L \times L}$  og eliminere de respektive radene hvor ingen måldata er tilgjengelig. Dette kan spesifiseres som

$$\mathbf{M} = H_D(\mathbf{I}_{L \times L}), \quad (2.9)$$

hvor funksjonen  $H_D$  kun bevarer de radene av den angitte matrisen som er spesifisert av  $D$ . Formålet med utvelgelsesmatrisen er å ekstrahere kun de verdiene hvor slow-time data er tilgjengelig. Vi kan videre forme  $\bar{\mathbf{w}}(\tilde{u})$  ved å velge en vindusfunksjon av  $L$  verdier,  $\hat{\mathbf{w}}(\hat{u}) \in \mathbb{C}^{L \times 1}$ , og avkorte ned til lengde  $K$ :

$$\bar{\mathbf{w}}(\tilde{u}) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{w}}(\hat{u}) \in \mathbb{C}^{K \times 1}. \quad (2.10)$$

Den rekonstruerte matrisen burde etter en regenereringsprosess fortsatt bibeholde de samme verdiene som opprinnelig, med andre ord

$$(\mathbf{M}\hat{\mathbf{Y}})(t_m, \tilde{u}) = \tilde{\mathbf{Y}}(t_m, \tilde{u}). \quad (2.11)$$

For enkelhetsskyld er indeksene videre kun gitt for sluttproduktet, og med vindusfunksjonene inkorporert blir dette kravet til

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{Y}})(t_m, \tilde{u}) = (\mathbf{M}\hat{\mathbf{w}})\tilde{\mathbf{Y}}(t_m, \tilde{u}). \quad (2.12)$$

Dette kan omskrives som

$$(\mathbf{M}\hat{\mathbf{F}}^*\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{Y}})(t_m, \tilde{u}) = \bar{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{Y}}(t_m, \tilde{u}), \quad (2.13)$$

som leder til

$$\hat{\mathbf{F}}_R\hat{\mathbf{D}}(t_m, \hat{\omega}) = \bar{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{Y}}(t_m, \tilde{u}), \quad (2.14)$$

gitt den inverse partielle Fouriermatrisen  $\hat{\mathbf{F}}_R = \mathbf{M}\hat{\mathbf{F}}^* \in \mathbb{C}^{K \times L}$ .

Den rekonstruerte løsningen skal være sparse i doppler og det er mest nærliggende å gjenskape den direkte i dette rommet. Gitt en avstandscelle  $T = t_m$  skal det derfor gjenskapes en sparsommelig profil  $\hat{\mathbf{D}}(T, \hat{\omega})$  av  $L$  dopplersampler som samsvarer med observasjoner. Rekonstruksjonsproblemet kan dermed formuleres som

$$\hat{\mathbf{D}}(T, \hat{\omega}) = \min ||\hat{\mathbf{D}}(T, \hat{\omega})||_1, \quad (2.15)$$

gitt betingelsen

$$||\hat{\mathbf{F}}_R\hat{\mathbf{D}}(T, \hat{\omega}) - \bar{\mathbf{w}}(\tilde{u})\tilde{\mathbf{Y}}(T, \tilde{u})||_2 \leq \epsilon, \quad (2.16)$$

hvor  $\epsilon$  er akseptabel margin for feil i løsningen. Nivået på  $\epsilon$  vil avgjøre hvor mye endring det tillates på de dataene som er samlet inn. Denne kan med fordel settes i forhold til estimert støygulv slik at kun hovedsaklig støy elimineres. En for liten verdi vil ikke gi rom for å rette opp dataene for å fokusere opp mål og få et sparse resultat, men en for høy verdi kan føre til at eventuelle mindre mål blir ekskludert og ikke blir bevart i rekonstruksjonen.

En kjøring av den ovennevnte optimering over alle diskrete avstander  $t_m = 1, 2, \dots, R$  vil resultere i et range-dopplerkart  $\hat{\mathbf{D}}(t_m, \hat{\omega})$  hvor eventuelle gap er blitt fylt inn og det er blitt foretatt en eventuell ekstrapolasjon. Siden prosessen er uavhengig for hver avstandscelle kan den kjøres i parallell hvis muligheten er der. Mange ulike algoritmer er blitt foreslått i litteraturen med hensyn til sparse rekonstruksjon [3, 24, 25, 26, 27]. Dette er en regnetung operasjon i forhold til for eksempel FFT. Celleoppløsning i doppler med hensyn på  $\hat{\omega}$  i (2.14) og (2.15) vil nå være betinget av  $\Delta\hat{\omega} = \frac{2\pi}{L}$ .

### 2.1.3 Fusjonerte løsninger

Løsningen gitt i  $\hat{\mathbf{D}}(r, \hat{\omega})$  kan være ganske effektiv for videre behandling, men avhengig av anvendelsesområde vil den også kunne assosieres med visse ulemper. Løsningen kommer, som navnet tilsier, til å være sparse, altså at mange av elementene vil være eksakt lik null, tildels beroende på hvordan nivået på  $\epsilon$  er satt. Det vil dermed stort sett heller ikke eksistere mye støy i bildet. En sparse løsning kan derfor indirekte sees på som en deteksjonsprosedyre noe som ikke alltid vil være ønskelig. Blant annet vil en slik deteksjon ikke tilfredsstillende kravene for konstant falskalarmrate som ofte er ønsket i deteksjonsammenheng. Det er derfor foreslått såkalte fusjonerte eller hybride løsninger i litteraturen [23] hvor en sparse løsning kombineres med reelle data, der hvor slike er tilgjengelige. Ved avstand og slow-time posisjoner hvor ingen data er blitt tatt opp anvendes resultater fra sparse rekonstruksjonen, ellers beholdes måledata, eventuelt vektet lineært med sparse løsningen. Tradisjonelle fremgangsmåter for deteksjon, klassifikasjon og sammenligning av resultater vil fortsatt kunne ha behov for tilpasning før anvendelse på slike bilder, men kan ellers tas i bruk på det fusjonerte range-Dopplerkartet angitt med  $\mathbf{R}_{Hyb}(r, \hat{\omega})$ .

En fusjonert range-dopplerløsning genereres ved å transformere den sparse range-dopplerløsningen tilbake til slow-time

$$\hat{\mathbf{Y}}_S(r, \hat{u}) = \hat{\mathbf{F}}^* \hat{\mathbf{D}}(r, \hat{\omega}) \in \mathbb{C}^{L \times R}, \quad (2.17)$$

hvor  $\hat{\mathbf{F}}^* \in \mathbb{C}^{L \times L}$  er den inverse Fouriermatrisen. Rekonstruerte data  $\hat{\mathbf{Y}}_S(r, \hat{u})$  i tidsdomenet kombineres med måledataene etter inkorporasjon av en vindusfunksjon

$$\mathbf{Y}_{Hyb}(r, \hat{u}) = \begin{cases} \alpha \tilde{\mathbf{w}} \tilde{\mathbf{Y}}(r, \hat{u}) + \sqrt{(1 - \alpha^2)} \hat{\mathbf{Y}}_S(r, \hat{u}), & (r, \hat{u}) \in D \\ \hat{\mathbf{Y}}_S(r, \hat{u}), & (r, \hat{u}) \notin D \end{cases} \quad (2.18)$$

der  $(r, \hat{u}) \in D$  angir lokasjoner hvor ekte data i avstand og slow-time er tatt opp. En Fouriertransformasjon over slow-time rekonstruerer til slutt det endelige hybride range-dopplerkartet:

$$\mathbf{R}_{Hyb}(r, \hat{\omega}) = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{Y}_{Hyb}(r, \hat{u}) \in \mathbb{C}^{L \times R}. \quad (2.19)$$

$0 \leq \alpha \leq 1$  kan velges for å vekte løsningen på ulike måter. For å bevare de opprinnelige detaljene og få en løsning som ligner mest mulig på et konvensjonelt range-dopplerkart bør  $\alpha$  settes til verdier nær 1. Mindre verdier av  $\alpha$  vil derimot føre til sparsomme kart. Slik vektning betyr også at støystatistikken vil være endret i det endelige bildet siden det ene settet av dataene ikke vil innholde noe nevneverdig støy. Spesielt vil lavere verdier av  $\alpha$  ha betydning for en deteksjonsprosess som eventuelt må finjusteres for dette.

## 2.2 Praktiske utfordringer

Sparse rekonstruksjon blir sett på som en regnekrevende prosess siden løsninger på likninger 1.7 og 1.8 må finnes ved hjelp av iterative optimeringsalgoritmer. Det finnes mange ulike foreslåtte metoder med fordeler og ulemper. I henhold til range-dopplerrekonstruksjon omtalt i dette kapitlet må sparse rekonstruksjonsoperasjonen gjentas for hver avstandscelle. Dette kan fort ta flere sekunder på en standard stasjonær maskin, jamfør en FFT på noen millisekunder. Andre foreslåtte CS radarvarianter

---

---

i litteraturen [12] prøver å gjenskape hele bildet ved hjelp av en 2D-optimering. Dette bør kunne gi raskere resultater, men sparsomhetskravene og toleransenivåene for en rekonstruksjon vil da også gjelde hele bildet. Disse teknikkene er også foreslått med redusert lavnivå sampling på pulsnivå.

Det foregår forskningsaktivitet rundt maskinlæring kombinert med SR [28]. Det er mulig at ved hjelp av maskinlæringsteknikker kan tidsbruken i sparse rekonstruksjon reduseres. Dette vil også muliggjøre kjøring av metodene ved hjelp av dedikerte prosesseringsenheter.

---

## 3 Eksempler og analyser

I dette kapittelet anvendes radarmodellen fra kapittel 2 til å demonstrere ytelse på noen utvalgte eksempler hvor sparse rekonstruksjonsmetoder anvendes. Teknikkene eksemplifiseres både med simulerte data og data innsamlet fra en radar. Dette kan sees på som illustrasjoner på hvor slike metoder kan tas i bruk og belyser også noen begrensninger.

### 3.1 Eksempler fra simulerte data

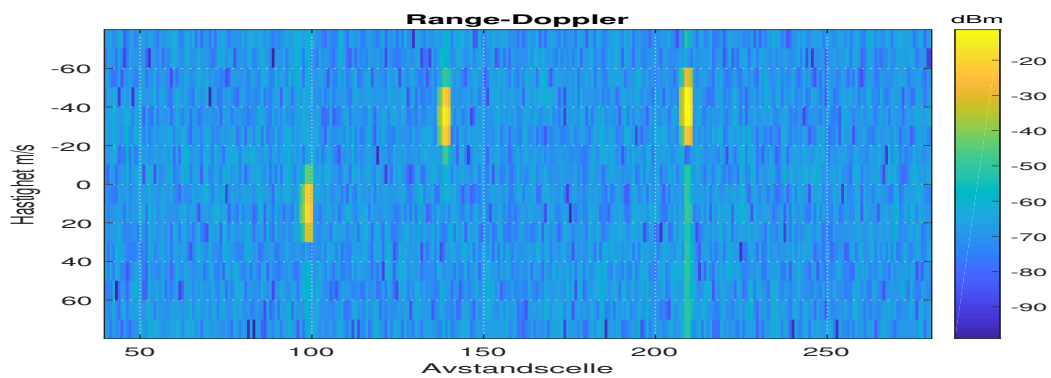
Det teoretiske rammeverket rundt CS og SR kan anvendes for å evaluere situasjoner hvor disse metodene kan tas i bruk og hvor stor reduksjon i datainnsamling som vil kunne være gjennomførbare. For å demonstrere hva slags ytelse som kan forventes fra CS- og SR-metoder kan det utføres ulike typer simuleringer av radarsystemer. Den store kompleksiteten setter begrensninger på hva slags simuleringer som kan kjøres og uttestes, men det er viktig å få påpekt at så fremt kravene for SR er tilfredsstillende vil rekonstruksjonen være entydig og nøyaktig, med en eventuell korreksjon for støy.

For å illustrere CS-konseptet er det utført noen enkle simuleringer for et tenkt radarsystem som er plassert 1000 meter over havet og som opererer på 3GHz med en PRF på 3kHz; Advanced Propagation Model (APM) er anvendt som propagasjonsmodell. Fire Swerling 1 fluktuerende mål er simulert plassert i avstandscelle nummer 75, 125, 210 og 260 hvor hver enkelt celle representerer en antatt avstandsoppløsning på 800m. Disse parameterne er tilfeldig valgte for å eksemplifisere og prosessen er tildels uavhengig av hva de eksakte verdiene skulle være. For eksempel vil en finere radaroppløsning resultere i mer detaljert clutter og mål i avstand, men ikke forandre på observert sparsomhet i doppler. Alle målene har en konstant, tilfeldig valgt hastighet og RCS, i enhver prosesseringsperiode. Det koherente prosesseringsintervallet er satt til på 16 pulser. For konstruksjon av range-dopplerkartene anvendes et Blackman vindu som også er et tilfeldig valg. Det antas videre at det kun er støy som påvirker signalene, men at målene sprer seg ut i avstand over to naboceller med sideløber på henholdsvis -20dB og -26dB.

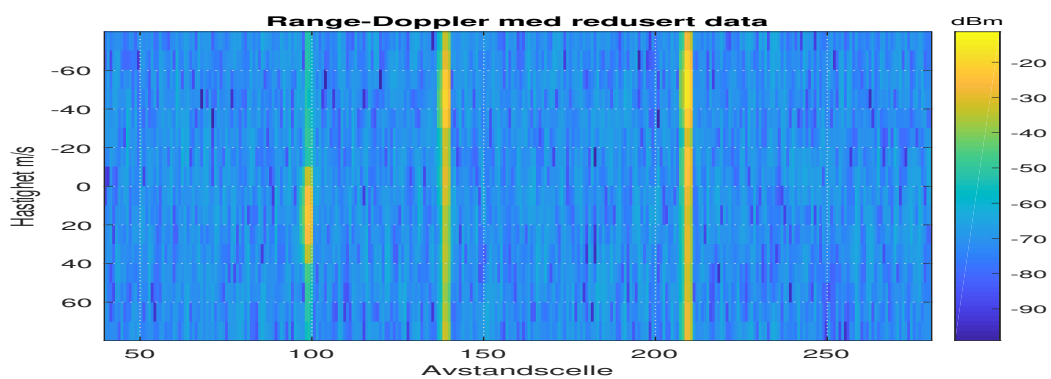
Figur 3.1 angir et slikt range-dopplerbilde hvor tre av målene skiller seg klart ut. Siden RCS verdiene trekkes tilfeldig ut, har det siste målet fått en veldig lav verdi og ligger under støygulvet.

I dopplerdomenet dekker hvert av målene i hovedsak én enkel celle av betydning hvor det meste av energien er fokusert, men det er likevel en del spredning i doppler. Med en antagelse om at hvert mål dekker tre celler i doppler og at antall tilfeldige målinger bør være omtrent fire ganger større enn antall ikke-null elementer bør det derfor være tilstrekkelig med 12 datapulser i løpet av integrasjonstiden. Det er derfor mulig å redusere antall utsendte pulser ned fra 16 med ca 4 og likevel klare å gjenskape gode range-dopplerkart i de aller fleste tilfellene. Figur 3.2 angir et slikt range-dopplerkart hvor 3 tilfeldig utvalgte pulser i pulstoget er fjernet og erstattet med null-verdier. Dette tilsvarer en besparelse i tid på ca. 19%. En konvensjonell generering av range-dopplerkart vil ikke fungere siden dette gir utslag i redusert SNR og en større utsmøring i doppler.

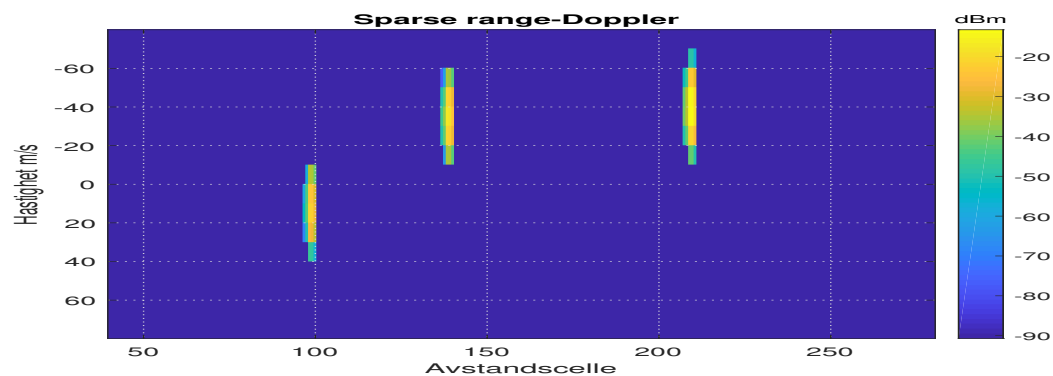
Ved å ta i bruk sparse rekonstruksjon beskrevet i tidligere kapittel (1.2.1) kan de utelatte pulsene gjenskapes i Fourierdomenet for å få et sparse range-dopplerkart og resultatet, gjengitt i figur 3.3, er



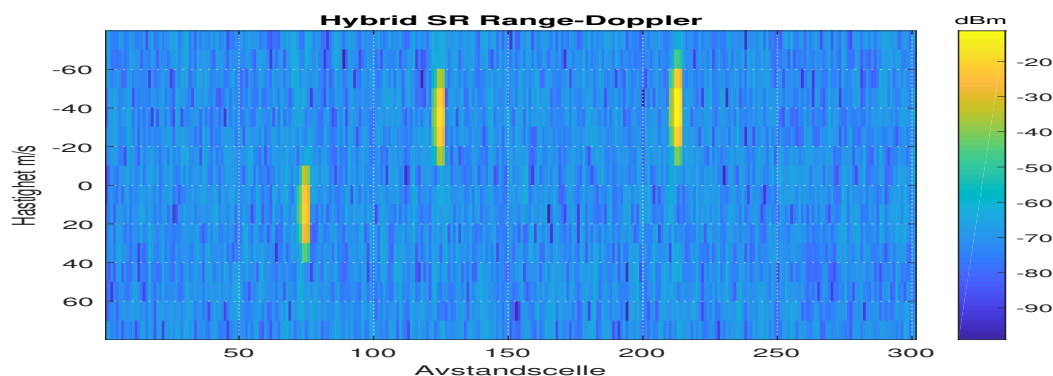
Figur 3.1 Standard RD-kart med fullt populære data



Figur 3.2 Standard RD-kart med redusert data (13 pulser av 16)



Figur 3.3 Rekonstruert RD-kart (13 av 16 pulser ved hjelp av SR)



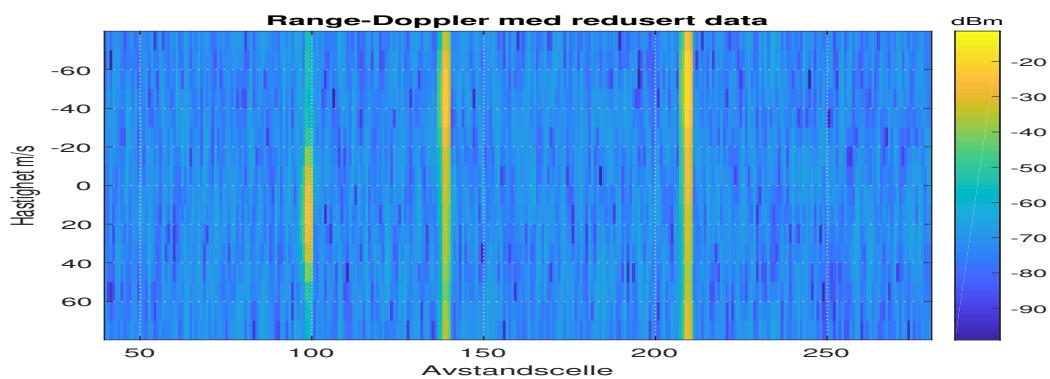
Figur 3.4 Rekonstruert fra 13 pulser, hybrid løsning

den direkte løsningen fra sparse rekonstruksjonen. Dette kan kombineres med ekte data for å få en fusjonert hybrid løsning som kan sees i figur 3.4. Rekonstruksjonen, visuelt, gjenspeiler ikke det opprinnelige datasettet helt perfekt, men målene er nå fokusert og en standard deteksjonsprosess som CFAR-test ville kunne detektere målene med godt hastighetsestimat.

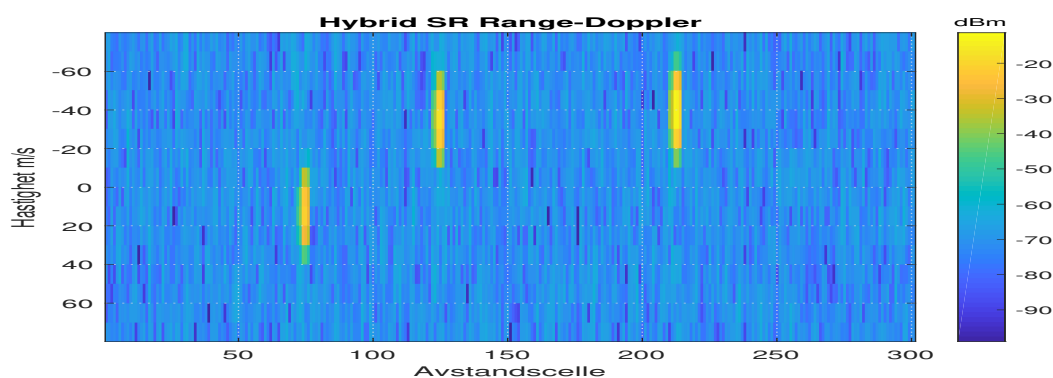
Denne prosessen blir i neste omgang repetert for å vurdere hvorvidt det er mulig å presse ned antall pulser. Prosessen ble gjentatt med 10 tilgjengelige pulser fra et pulstog på 16. Dette resulterer i tilnærmet identisk resultat i rekonstruksjonen som angitt i figurene 3.5 og 3.6 og gir en besparelse i tid med hensyn til ressursstyring på litt over en tredjedel.

En ytterligere reduksjon av pulser vil begynne å avvike vesentlig fra teorien ved at forholdet mellom antall målinger og antall ikke-null elementer blir mye mindre enn fire, og resultere i at et entydig estimat av målene ikke lenger er oppnåelig. Dette er illustrert i figurene 3.7 og 3.8 hvor det ble antatt at kun halvparten av pulsene sendes ut. Vi ser at målene riktignok blir fokusert, men på flere tvetydige hastigheter.

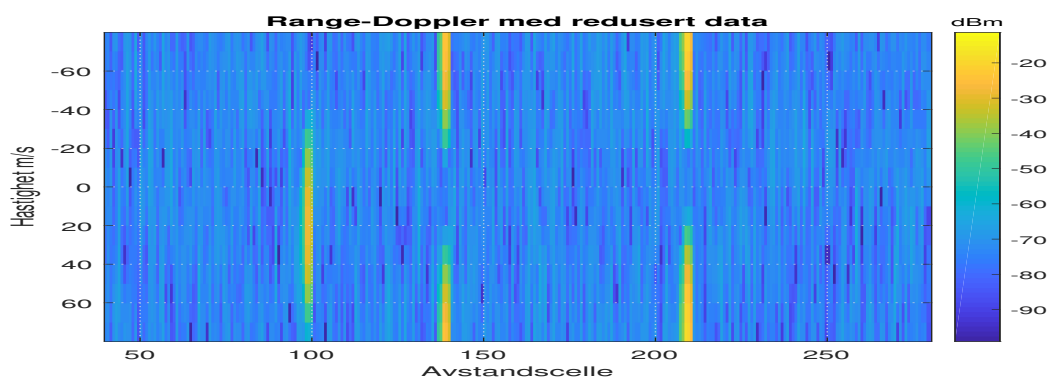
I eksemplene ovenfor antas det at det ikke foretas ekstrapolasjon i tidsdomenet. Dette kan legges inn for å snevre målene i doppler og øke SNR ytterligere. Figur 3.9 gir et eksempel på hva som kan forventes hvis det ekstrapoleres seks pulser før og etter pulstog og det fortsatt antas at tre av pulsene ikke ble utsendt (sammenlignet med figurene 3.3 og 3.4). Dette kan hjelpe med å forbedre SNR, riktignok kun hvis rekonstruksjonsprosessen allerede kan skille ut målene. Med andre ord,



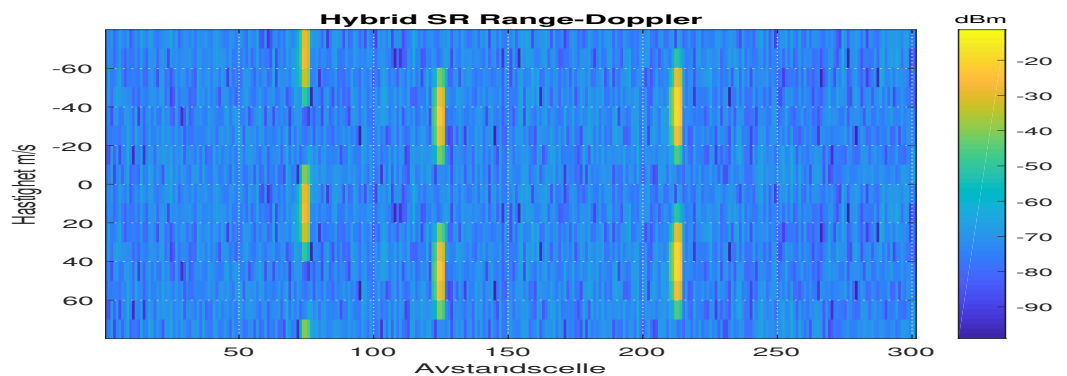
Figur 3.5 Standard RD-kart med redusert data (10 pulser av 16)



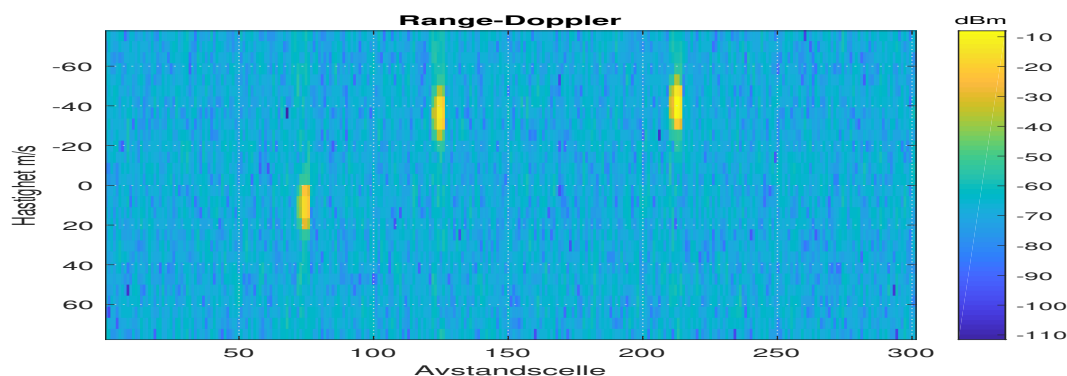
Figur 3.6 Rekonstruert RD-kart (10 pulser av 16), hybrid løsning



Figur 3.7 Standard RD-kart med redusert data (8 pulser av 16)



Figur 3.8 Rekonstruert RD-kart (8 pulser av 16), hybrid løsning



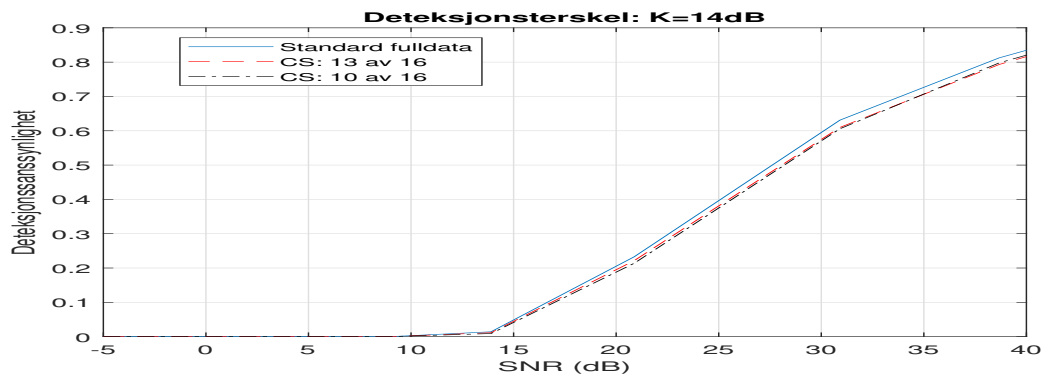
Figur 3.9 Rekonstruert RD-kart med ekstrapolasjon fra 13 pulser, hybrid løsning

hvis målene allerede ligger veldig nær eller under støygulvet, slik at  $\epsilon$  betingelsen i (2.16) ikke blir tilfredsstilt, vil en rekonstruksjonsprosess ikke evne å ekstrahere dem ut.

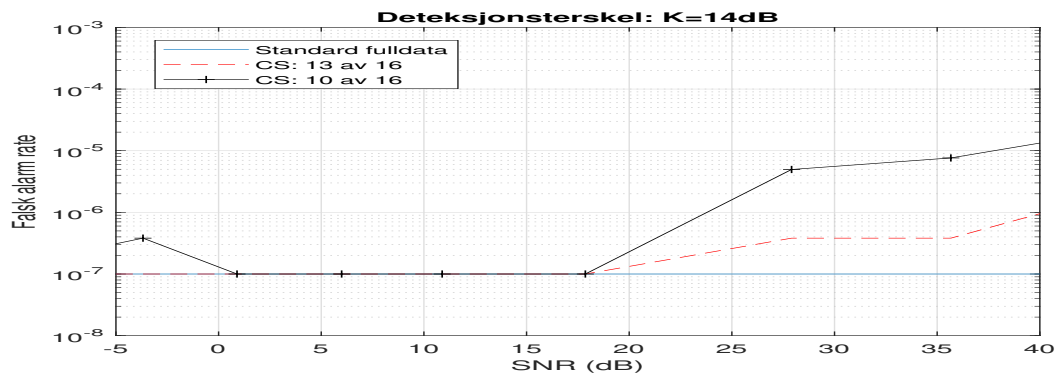
Range-dopplerbilder er i seg selv ofte bare et mellomprodukt i en lengre prosesseringskjede i en radar hvor eventuelle mål detekteres. For å vurdere hvordan deteksjonsytelsen endrer seg ved bruk av CS ble det utført simuleringer med hensyn på dette. Det ble generert 500 unike range-dopplerkart med samme type statistikk som beskrevet ovenfor, men hvor målene holdt seg til en gitt fast SNR og en GO-CFAR [24] deteksjonstest ble kjørt over de rekonstruerte hybride bildene med 4 guardceller og 10 midlingceller på hver side. Deteksjonsterskel var satt til 14dB.

Det er imidlertid viktig å være klar over at sparse løsninger er støyfrie og en tradisjonell deteksjonsprosess ved hjelp av CFAR ikke nødvendigvis vil fungere godt. Hybride løsninger unngår delvis slike problemer, men også her vil støyen kunne ha en annen karakteristikk enn om fullt datasett med alle pulser var tilgjengelig. I tillegg vil målets spredning i avstand og doppler kunne føre til mange deteksjoner som må grupperes sammen i ettetid. For å få best mulig deteksjonsevne må deteksjonsprosessen tilpasses slike problemstillinger; vi velger likevel å se bort fra dette og den samme deteksjonsfremgangsmåten blir brukt for å evaluere hvordan deteksjonsevnen endrer seg med redusert antall pulser. Vi antar også at hvis et mål avviker med mer enn to celler i doppler blir den kategorisert som en feildeteksjon.

Tre, eller seks, tilfeldige pulser ble derfor utelatt for alle integrasjonsintervall og sparse rekonstruksjon



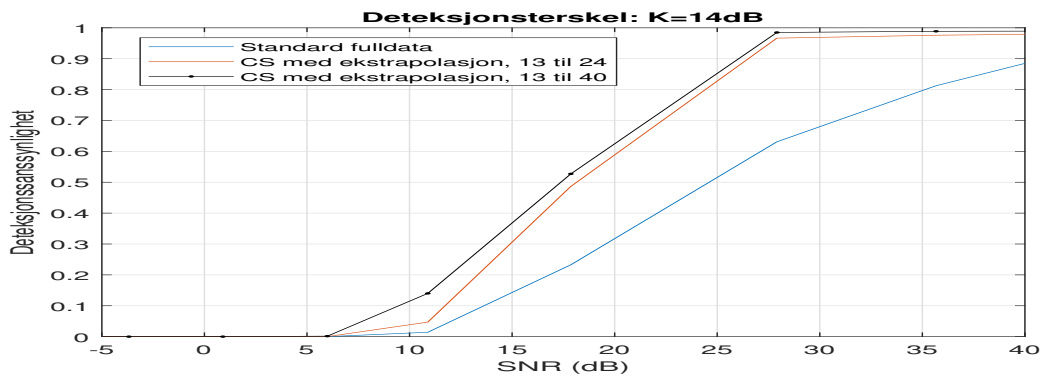
Figur 3.10 Sannsynlighet for korrekt deteksjon



Figur 3.11 Sannsynlighet for feil deteksjon

ble brukt for å generere hybride range-dopplerkart hvorpå CFAR-prosessen ble kjørt. Resultatene er vist i figur 3.10. Den blå kurven angir deteksjon med standard prosessering hvor alle 16 pulser er tilgjengelig, mens for rød og svart kurve antas det at, henholdsvis, enten 13 av 16 eller 10 av 16 tilfeldige pulser er observert. Alle kurvene ligger nær hverandre og indikerer at deteksjonsytelsen er veldig sammenlignbar, men med et lite tap for CS-basert rekonstruksjon. Det bemerkes at ved høye SNR verdier kommer man veldig nær opp mot full deteksjonsytelse, men er likevel begrenset av propageringsfaktor og GO-CFAR som med 10 midlingceller ikke evner å detektere absolutt alle tilfeller. Falskalarmratekurvene er gitt i figur 3.11 hvor plottene for standard prosessering og CS på 13 av 16 pulsene er veldig like. Når kun 10 av 16 pulser er tilgjengelige er det derimot en økning i falskalarmraten. Dette skyldes at antall observerte pulser er lavt og tilfeldige utvalgte hastigheter på målene vil kunne føre til situasjoner hvor hastighetene ikke alltid kan bestemmes entydig. Dette fører til en liten økning av deteksjoner i andre hastigheter enn forventet og blir kategorisert som feildeteksjoner.

I figur 3.12 er prosessen repetert, men med en tilleggsantagelse om ekstrapolasjon i dopplerdomenet. Det blir foretatt 4 eller 12 ekstrapolasjoner på begge sider av dataene i slowtime. En slik ekstrapolasjon i tid fører til flere dopplerceller og gjør at CFAR må også kjøres over flere rader. Målene vil derfor også kunne spre seg utover flere dopplerceller hvor en deteksjon kan forekomme. Alt i alt, fører dette likevel til en noe økt deteksjonsevne siden godt adskilte mål som ligger under en CFAR deteksjonsterskel opprinnelig likevel vil kunne bli fremhevet i en sparse rekonstruksjonspross.

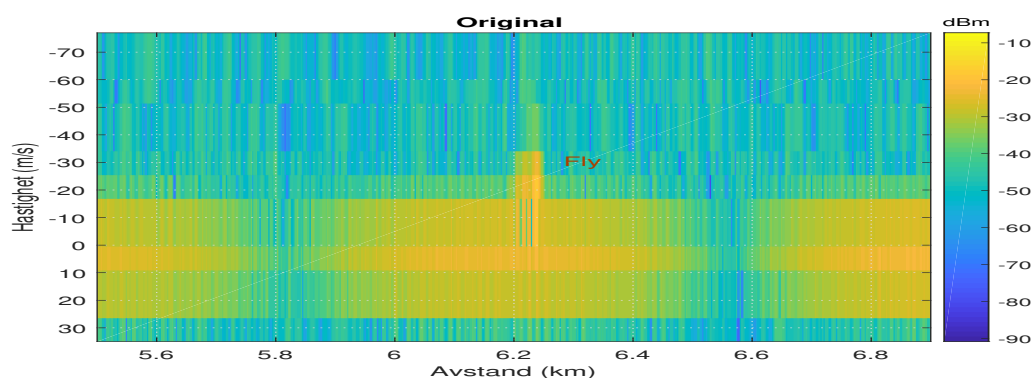


Figur 3.12 Sannsynlighet for korrekt deteksjon med ekstrapolasjon

Deteksjonssytelsen øker ikke nevnerdig ved å øke ekstrapolasjonen fra 4 til 12 pulser på begge sider, noe som viser at den nedre grensen er bestemt av  $\epsilon$  i (2.16). En liten ekstrapolasjon kan derfor være fordelaktig i mange situasjoner hvis en sparse rekonstruksjonsprosess skal foretas likevel.

## 3.2 Eksempler fra ekte data

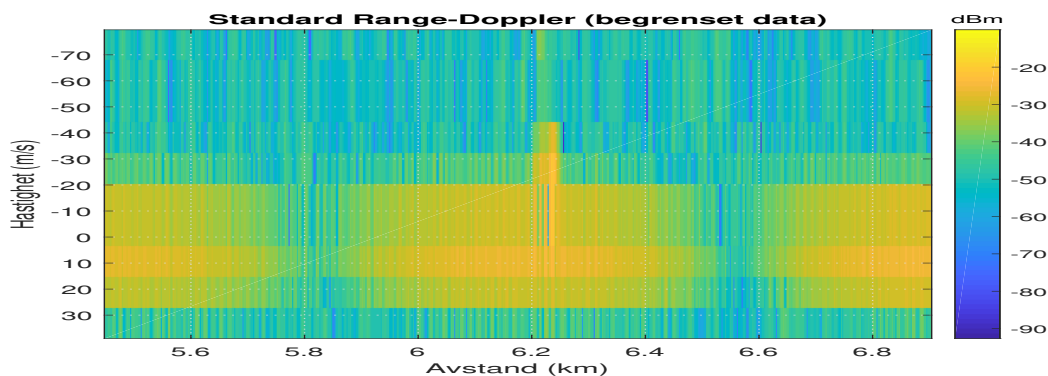
De neste eksemplene er hentet fra radarmålinger utført med en S-bånd radar<sup>1</sup> rettet mot en Boeing 737. Målesettet besto av 400 pulser noe som gir grunnlag for å utprøve CS og SR også ved veldig lange integrasjonstider. PRFen var på 4kHz og avstandsoppløsningen på 3m. Innledningsvis starter vi med å bruke de første 16 pulsene, noe som gir et range-dopplerbilde som vist i figur 3.13. Bildet er forstørret for å fokusere på de mer interessante delene, altså clutter og selve flyet. En kan merke seg at støygulvet er noe annerledes enn tidligere simulerte range-dopplerbilder og det er bakkeclutter ved null doppler. Flyet har noe høyere doppler enn bakkeclutteret og skiller seg dermed noe ut, men ligger likevel tett opp mot det.



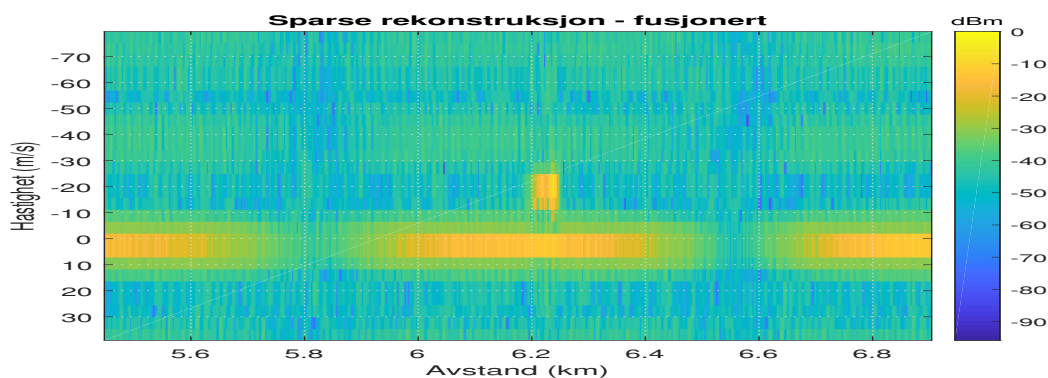
Figur 3.13 Standard RD-kart med full data (16 pulser av 16)

En tilfeldig reduksjon fra 16 til 12 utvalgte pulser gir oss RD-kartet vist i figur 3.14. Både målet og clutteret har vokst seg større i doppler og vil kunne vanskeliggjøre deteksjon og eventuelt

<sup>1</sup>Eksperimentell FFI-radar kjent som BirdRAD



Figur 3.14 Standard kart med redusert data (12 pulser av 16)

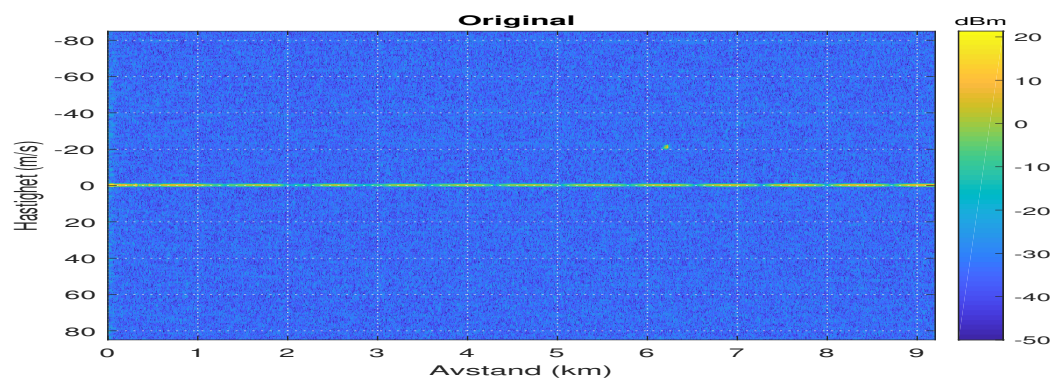


Figur 3.15 Rekonstruert fra 8 pulser, hybrid løsning

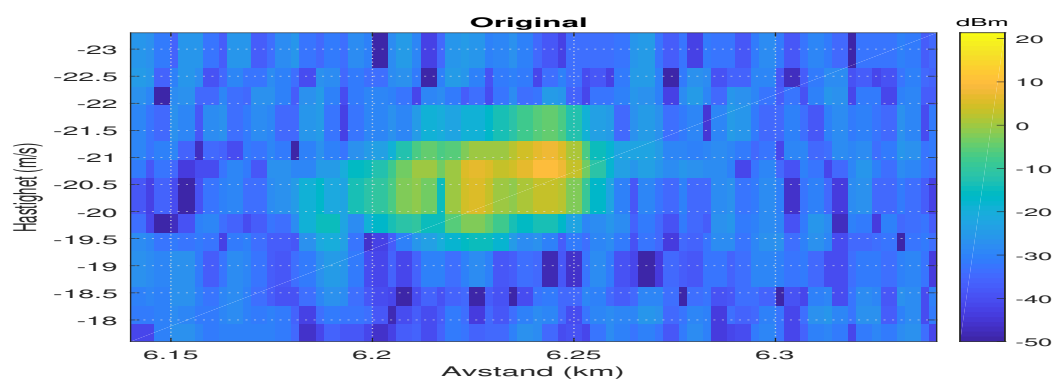
klassifikasjon. Med dette som utgangspunkt kan en rekonstruksjon foretas ved hjelp av SR inkludert en ekstrapolasjon av 8 pulser på hver side; noe som leder frem til figur 3.15. Målet skiller seg ut nå klart fra clutteret og er lett gjenkjennelig som et separat objekt. Clutteret er også blitt vesentlig mer lokalisert. I dette tilfellet vil det likevel neppe ha noe å si for deteksjonsevnen siden en CFAR-test gjerne kjøres over avstandceller, og fordelene med økt oppløsning vil derfor være mest interessant for avbildningsformål og anvendelser som SAR eller ISAR.

For å demonstrere hvordan CS og SR også kan tas i bruk ved veldig lange integrasjonstider anvender vi alle tilgjengelig data i det neste eksempelet. Figur 3.16, forstørret i figur 3.17, angir det opprinnelige range-dopplerkartet med 400 pulser (0.1s). Mange pulser resulterer i høy SNR og meget god oppløsning i hastighet. Ulempen er selvsagt at en konvensjonell radar må bruke veldig lang tid og være rettet mot samme mål under hele CPIen. I compressed innsamling kan derfor radaren heller dele opp tiden mellom ulike retninger eller frekvenser og samle inn mindre mengder med data, men fortsatt fordelt over det samme tidsintervallet.

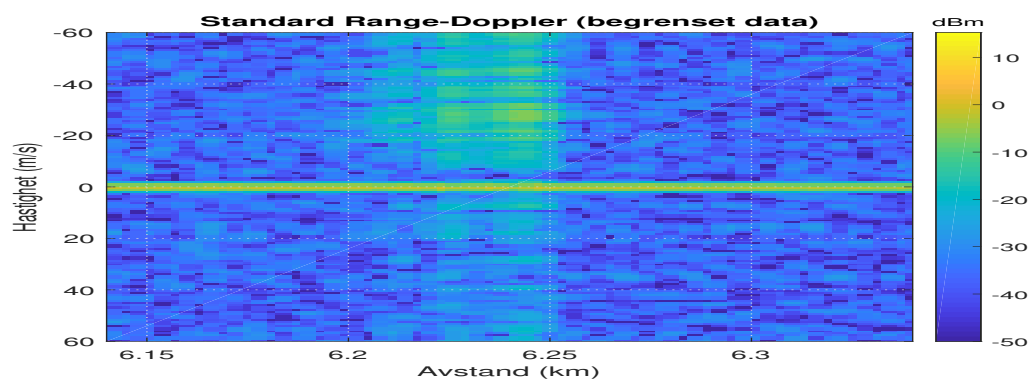
Figur 3.18 angir det forstørrede range-dopplerbildet hvis radaren kun samler inn  $K = 200$  av i alt  $N = 400$  pulser i en tilfeldig rekkefølge og de tomme pulsene settes til null. Dette er ikke en reell situasjon for en radar, men viser effekten av manglende pulser i en slik prosessering. Målet er nå spredt utover i doppler. Ved bruk av SR med hybrid rekonstruksjon, inkorporert 50 pulsekstrapolasjoner på hver side, fås figurene 3.19 og 3.20. Resultatet gir en rekonstruksjon på nivå med opprinnelige innsamlede data.



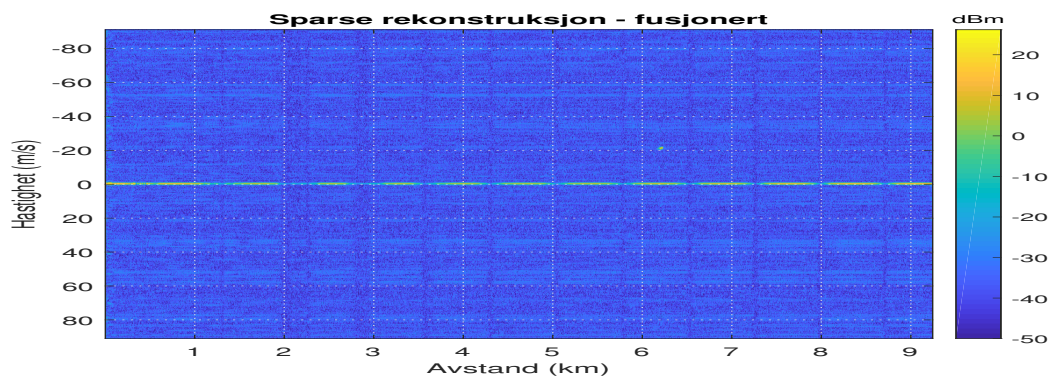
Figur 3.16 Standard RD-kart med full data (400 pulser av 400)



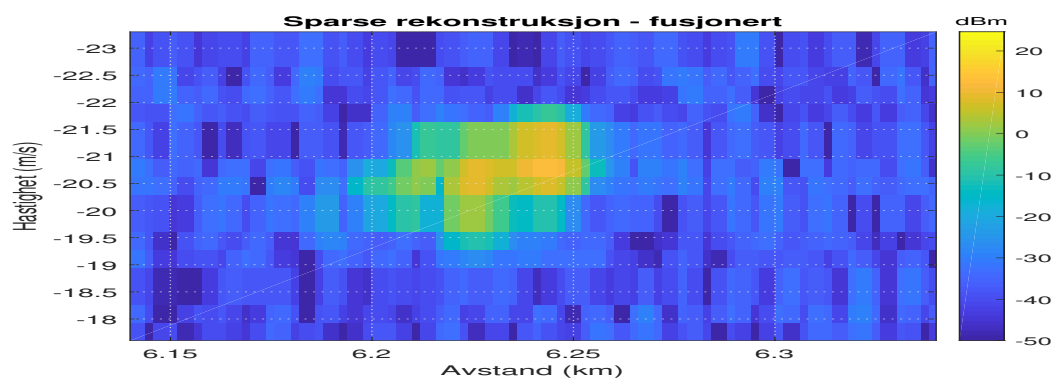
Figur 3.17 Standard RD-kart med fullt data (400 pulser av 400)



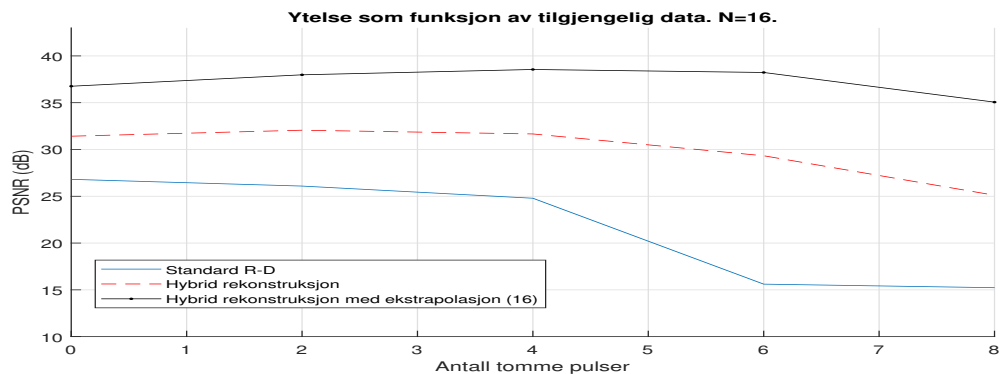
Figur 3.18 RD-kart med 50% reduserte mengde data (200 pulser av 400)



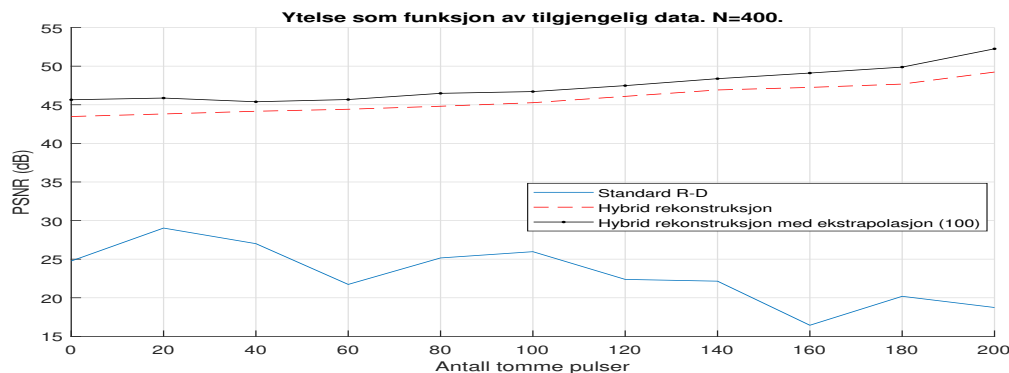
Figur 3.19 Hybrid rekonstruksjon med ekstrapolasjon av reduserte data



Figur 3.20 Hybrid rekonstruksjon med ekstrapolasjon av reduserte data



Figur 3.21 Målets peak SNR som funksjon av antall utelatte pulser av 16



Figur 3.22 Målets peak SNR som funksjon av antall utelatte pulser av 400

Flyet og clutteret opptar relativt få celler i doppler og en interessant problemstilling er dermed hvor mange pulser som behøves for å lage gode bilder og hvordan det påvirker målets SNR. Figurene 3.21 og 3.22 angir peak SNR i flyets forventende område som funksjon av antall utelatte pulser med utgangspunkt i henholdsvis 16 og 400 pulser. Resultatene er vist både med og uten ekstrapolasjon av pulser. En reduksjon i antall tilgjengelige pulser fører nesten automatisk til utsmøring i doppler ved tradisjonell prosessering, selv om SNR ikke nødvendigvis går så mye ned. Sparse rekonstruksjon derimot evner å bevare et høyt SNR nivå. Dette er særskilt merkbart for tilfellet med 400 pulser hvor forholdstallet mellom antall pulser og antall celler målet opptar i doppler er veldig høyt. Hvis vi antar at det er  $k = 20$  ikke-null elementer i løsningen trenger man i forhold til 1.10 egentlig ikke mer enn 80 målinger. Det muliggjør en kraftig reduksjon i antall pulser som er nødvendig for en perfekt rekonstruksjon uten tap. SR kan da fylle inn gapene slik at de fører til en ytterligere fokusering utover unøyaktighetene som måtte eksistere i dataene. Dette er årsaken til en økende SNR etterhvert som antall tomme pulser vokser. Ekstrapolasjon gir i alle situasjoner en ekstra gevinst som vedvarer. Det bemerkes, som tidligere, at hvis antall pulser reduseres betraktelig, eller at datastrukturen på tilgjengelige pulser fremhever seg på en regelmessig måte, vil det lede til rekonstruksjonsproblemer som tvetydigheter i doppler. Vi kan også merke oss at selv med ingen utelatte pulser og ingen ekstrapolasjon, vil en sparse rekonstruksjonsprosess med  $\epsilon > 0$  resultere i en sparse løsning som øker SNR.

---

## 4 Oppsummering

Denne rapporten har sett på noen utvalgte områder i radarsammenheng hvor det kan tas i bruk compressed sensing og sparse rekonstruksjonsteknikker. Compressed sensing muliggjør innsamling av data i en komprimert form, hvor man for eksempel ikke behøver så mange pulser i en pulset radar som tradisjonell teori skulle tilsi. Dette betyr at en lav-PRF radar vil kunne oppnå en fordel i form av for eksempel redusert tidsbruk. En betingelse for at dette skal kunne fungere er at enkelte krav om sparsommelighet er oppfylt. For å rekonstruere data som er samlet ved hjelp av compressed sensing brukes egnede sparse rekonstruksjonsmetoder. Disse metodene krever en viss regnekraft, men kan til gjengjeld rekonstruere data helt eksakt, hvis man ser bort fra støy.

I denne rapporten har hovedfokuset vært på generering av range-dopplerkart. Disse brukes ofte i en prosesseringkjede for å detektere eventuelle mål. Det er vist eksempler fra både simuleringer og ekte data hvor en selv med redusert antall pulser kunne rekonstruere eksakte range-dopplerbilder. Dette samsvarer godt med teorien for compressed sensing og sparse rekonstruksjon. Det er også mulig å øke doppleroppløsning ved slike teknikker, noe som kan være interessant i mange situasjoner. Deteksjonsevnen ble også kort vurdert under CS for enkle simuleringer og erfart til å være på samme nivå som med fulle datasett. Deteksjon på sparsommelige range-Dopplerkart kan imidlertid gi andre utfordringer, noe som kan være gjenstand for videre undersøkelser.

CS-metoder kan være interessante for bruk i systemer hvor tid er en kritisk ressurs og hvor en radar ellers ikke evner å søke i ulike retninger med like god kapasitet. Dette fordrer radarer med stråleformingsmetoder og raske regnemaskiner som kan kjøre rekonstruksjonsteknikker. Dette er et felt i stor endring og derfor er det viktig at radarene bør ha funksjonalitet for enkelt å installere nye algoritmer og å kunne oppgradere minne og prosessorer. Da vil man kunne ta i bruk mer effektive algoritmer og kanskje også erstatte noen av dem med andre beregningsformer, som for eksempel nevrale nettverk, etterhvert som erfaring og kunnskap om nye metoder og teknikker vokser frem.

---

---

## A MATLAB Klasse

Det er blitt utviklet et MATLAB klasseobjekt som på forespørsel kan fås via forfatteren. Formålet er å få til en enkel, men samtidig smidig prosess hvor en kan sende inn rådata og få det prosessert uten å gå inn i spesifikke programmering og matematiske detaljer. Klassen har som hovedfunksjon å generere range-Dopplerbilder ved hjelp av sparse rekonstruksjon. Som innparametere skal det blant annet angis hvor eventuelle gap i dataene befinner seg og i tillegg er det mulig å få til ekstrapolasjoner. Klassen anvender forøvrig programpakken *spgl* som følger med klassen eller eventuelt kan hentes ned som åpen kildekode fra Internett. Katalogstrukturen til *spgl* må legges inn i MATLAB før klassen kan tas i bruk.

Klassen består hovedsaklig av to funksjoner. Den ene funksjonen brukes for å initere og sette opp enkelte parametere, mens den andre foretar selve prosesseringen.

Oppstart av klassen:

```
SR_klasse=SparseRecClass ;
```

Initering:

```
SR_klasse.init( iterasjoner , optTol , decTol , verbose );
```

*iterasjoner*: angir maksimal antall iterasjoner som skal foretas ved rekonstruksjonen hvis toleransekravene ikke blir tilfredstilt

*optTol*: toleransenivå for løsningen, default =  $1e-7$

*decTol*: toleansenivå for hver iterasjon, default =  $1e-7$

*verbose*: 1=utskrift til skjerm for hver iterasjon

I tillegg er det mulig å forandre vindusfunksjonen ved å justere *SR\_klasse.wtype*. Som default brukes 'blackman'.

Hovedfunksjonen:

```
[W, Zf, Rcut] = SR_klasse.SR( sig , spattern , extrap , extrab , mnoise , efactor );
```

Innparametere:

*sig*: matrise med slow-time data (range-tid, N pulser hvorav de tomme kan bestå av null verdier)

*spattern*: vektor med samme lengde som antall pulser; for hvert element angir 0 at pulsen ikke skal tas med i rekonstruksjonen, 1 påpeker at pulsen skal inkluderes

*extrap*: antall pulser som skal ekstrapoleres i Doppler før oppstart av pulsetoget

*extrab*: antall pulser som skal ekstrapoleres i Doppler etter avslutningen av pulsetoget

*mnoise*: referanse støygulv for rekonstruksjonen, ved 0 beregnes dette automatisk

---

*efactor*: skaleringsfaktor som legges på støygulvet

*mnoise* og *efactor* tilsammen definerer feilmarginen i løsningen per avstandscelle

Utparametere:

*W*: sparse range-Doppler løsning

*Zf*: fusjonert range-Doppler løsning

*Rcut*: standard range-Doppler kart med utelatte pulser

Et praktisk eksempel på hvordan klassen kan anvendes er gitt nederst i koden for *SparseRecClass.mat*.

---

---

## Referanser

- [1] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.
- [2] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Communication in Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, pp. 1207–1223, 2006.
- [3] L. C. Potter, E. Ertin, J. T. Parker, and M. Cetin, “Sparsity and compressed sensing in radar imaging,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 1006–1020, 2010.
- [4] M. F. Duarte and Y. C. Eldar, “Structured compressed sensing: From theory to applications,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, pp. 4053–4085, 2011.
- [5] M. A. Weiss, *Data Structures and Algorithm Analysis*. Addison Wesley, 1994.
- [6] M. Rudelson and R. Vershynin, “Sparse reconstruction by convex relaxation: Fourier and gaussian measurements,” in *Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, pp. 207–212, 2007.
- [7] D. L. Donoho and J. Tanner, “Observed universality of phase transitions in high-dimensional geometry, with implications for modern data analysis and signal processing,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 367, pp. 4273–4293, Nov. 2009.
- [8] N. Y. Yu, “On statistical restricted isometry property of a new class of deterministic partial Fourier compressed sensing matrices,” in *Intl. Symposium on Information Theory and its Applications*, pp. 284–288, 2012.
- [9] J. Ma, X. Yuan, and L. Ping, “Turbo compressed sensing with partial DFT sensing matrix,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, pp. 158–161, feb 2015.
- [10] E. J. Candès and M. B. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 21–30, 2008.
- [11] S. Foucart and H. Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Birkhäuser, 2013.
- [12] M. A. Herman and T. Strohmer, “High-resolution radar via compressed sensing,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 57, pp. 2275–2284, June 2009.
- [13] L. Anitori, P. Hoogeboom, F. LeChevalier, and M. Otten, “Compressive sensing for high resolution profiles with enhanced Doppler performance,” in *European Radar Conference*, pp. 107–110, 2009.
- [14] D. Cohen and Y. C. Eldar, “Sub-nyquist radar systems,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 35–58, nov 2018.
- [15] J. Akhtar and K. E. Olsen, “A compressed sensing based design for formation of range-Doppler maps,” in *Proc. of IEEE Radar Conference*, pp. 35–39, 2016.

- 
- 
- [16] J. Akhtar and K. E. Olsen, "Formation of range-Doppler maps based on sparse reconstruction," *IEEE Sensors Journal*, vol. 16, pp. 5921–5926, Aug. 2016.
- [17] D. Cohen and Y. C. Eldar, "Reduced time-on-target in pulse Doppler radar: Slow time domain compressed sensing," in *Proc. of IEEE Radar Conference*, 2016.
- [18] M. Cetin, I. Stojanovic, O. Onhon, K. Varshney, S. Samadi, W. C. Karl, and A. S. Willsky, "Sparsity-driven synthetic aperture radar imaging: Reconstruction, autofocusing, moving targets, and compressed sensing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 4, pp. 27–40, 2014.
- [19] E. Giusti, D. Cataldo, A. Bacci, S. Tomei, and M. Martorella, "ISAR image resolution enhancement: Compressive sensing versus state-of-the-art super-resolution techniques," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 54, no. 4, pp. 1983–1997, 2018.
- [20] T. Huang, Y. Liu, X. Xu, Y. C. Eldar, and X. Wang, "Analysis of frequency agile radar via compressed sensing," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 6228–6240, Dec. 2018.
- [21] T. Strohmer and B. Friedlander, "Compressed sensing for MIMO radar - algorithms and performance," in *Proc. of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 464–468, 2009.
- [22] M. Rossi, A. M. Haimovich, and Y. C. Eldar, "Spatial compressive sensing for MIMO radar," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 62, no. 2, pp. 419–430, 2014.
- [23] J. Akhtar, B. Torvik, and K. E. Olsen, "Compressed sensing with interleaving slow-time pulses and hybrid sparse image reconstruction," in *Proc. of IEEE Radar Conference*, pp. 6–10, 2017.
- [24] W. L. Melvin and J. A. S. (Eds.), *Principles of Modern Radar*. SciTech Publishing, 2013.
- [25] M. Fornasier and H. Rauhut, "Compressive sensing" in *Handbook of mathematical methods in imaging*, O. Scherzer (Eds.). Springer New York, 2011.
- [26] E. van den Berg and M. P. Friedlander, "Probing the pareto frontier for basis pursuit solutions," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, no. 2, pp. 890–912, 2008.
- [27] E. C. Marques, N. Maciel, L. A. Naviner, H. Cai, and J. Yang, "A review of sparse recovery algorithms," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 1300–1322, Dec. 2018.
- [28] J. Akhtar, "Sparse range-Doppler image construction with neural networks," in *Proc. of IEEE Radar Conference*, 2020.

## About FFI

The Norwegian Defence Research Establishment (FFI) was founded 11th of April 1946. It is organised as an administrative agency subordinate to the Ministry of Defence.

### FFI's MISSION

FFI is the prime institution responsible for defence related research in Norway. Its principal mission is to carry out research and development to meet the requirements of the Armed Forces. FFI has the role of chief adviser to the political and military leadership. In particular, the institute shall focus on aspects of the development in science and technology that can influence our security policy or defence planning.

### FFI's VISION

FFI turns knowledge and ideas into an efficient defence.

### FFI's CHARACTERISTICS

Creative, daring, broad-minded and responsible.

## Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

### FFIs FORMÅL

Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

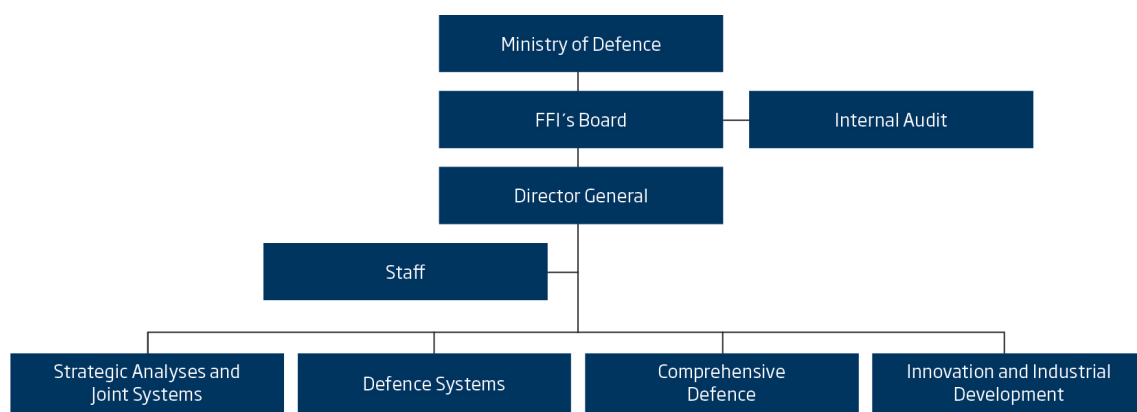
### FFIs VISJON

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

### FFIs VERDIER

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.

## FFI's organisation



**Forsvarets forskningsinstitutt**  
Postboks 25  
2027 Kjeller

Besøksadresse:  
Instituttveien 20  
2007 Kjeller

Telefon: 63 80 70 00  
Telefaks: 63 80 71 15  
Epost: [ffi@ffi.no](mailto:ffi@ffi.no)

**Norwegian Defence Research Establishment (FFI)**  
P.O. Box 25  
NO-2027 Kjeller

Office address:  
Instituttveien 20  
N-2007 Kjeller

Telephone: +47 63 80 70 00  
Telefax: +47 63 80 71 15  
Email: [ffi@ffi.no](mailto:ffi@ffi.no)